

Fundamentos de procesos aleatorios

PROYECTO: Funciones uniformes en la síntesis de fractales

Objetivo: Aplicar Sistemas de Funciones Iteradas (IFS) para la generación de fractales. Conocer Matlab para la generación de variables aleatorias (v.a.) de distribución uniforme. Aplicar instrucciones **histogram**, **rand**, **unifrnd**, **plot** y **scatter**.

PROCEDIMIENTO

Se toma un punto escogido aleatoriamente en el plano y se le aplica una de las funciones definidas mediante transformaciones afines lineales. Cada función se selecciona aleatoriamente y se dibuja al punto correspondiente. Los elementos estructurales son básicos y se repiten en diferentes escalas de resolución espacial. La densidad de las estructuras depende del número de iteraciones que se aplican.

0. Para observar la realización de una v.a. uniforme, genera un arreglo de un millón de números aleatorios con distribución uniforme en el rango de 0 a 1, $U[0,1]$. Grafica el arreglo empleando la instrucción **"histogram"**.

Aplica el siguiente procedimiento para generar al fractal **"Helecho"**.

1. Inicialización: Sea $(x_0, y_0) = (0,0)$ un punto en el plano.
2. Genera una variable aleatoria U , uniformemente distribuida $U[0, 1]$, la cual se interpreta como la probabilidad para escoger aleatoriamente a una transformación T_i .
3. Aplica la transformación T_i al punto (x_0, y_0) para obtener el nuevo punto (x_1, y_1) y gráficalo. El índice i de la transformación se determina según el intervalo donde se encuentra la variable U .
4. Repite la operación a fin de obtener la secuencia de puntos $\Rightarrow (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. El proceso es iterativo y el punto anterior sirve para generar al nuevo punto:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_i \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ tal que } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$
5. Repite hasta graficar diez mil puntos
- 6.- Reinicia el procedimiento y genera cien mil puntos.
- 7.- Reinicia el procedimiento y genera un millón de puntos.

Importante: Reporta el tiempo de procesamiento de cada fractal generado.



Fractal "Helecho de Barnsley"

Transformaciones afines para fractal helecho:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}; U < 0.01$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}; 0.01 \leq U < 0.86$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_3 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}; 0.86 \leq U < 0.93$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_4 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.44 \end{pmatrix}; U \geq 0.93$$

8.- Genera el fractal “**Estrella**”, empleando las transformaciones T_1 y T_2 .

Algoritmo:

- a. Fija un número razonablemente grande de iteraciones
- b. **Inicialización:** Fija las coordenadas de un punto inicial
- c. **Ciclo de iteraciones**
 - Escoge aleatoriamente una transformación, según las probabilidades P_1 y P_2 .
 - Determina el punto siguiente transformando al punto actual, según la transformada escogida.

Fractal“**Estrella**”



Matrices de transformación:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .745455 & -.459091 \\ .406061 & .887121 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.460279 \\ 0.691072 \end{pmatrix}; \text{ Probabilidad } P_1 \text{ de escoger } T_1 = 0.912675$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -.424242 & -.065152 \\ -.175758 & -.218182 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.809567 \\ 6.741476 \end{pmatrix}; \text{ Probabilidad } P_2 \text{ de escoger } T_2 = 0.087325$$

9.- Repite para generar el fractal “**Dragón**”

Fractal“**Dragón**”



Matrices de transformación:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8240740 & .281482 \\ -0.2123460 & .864198 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.88229 \\ -0.110607 \end{pmatrix}; \text{ Probabilidad } P_1 \text{ de escoger } T_1 = 0.787473$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.288272 & 0.720988 \\ -0.463889 & -0.377778 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.785360 \\ 8.095759 \end{pmatrix}; \text{ Probabilidad } P_2 \text{ de escoger } T_2 = 0.212527$$

10.- Genera el fractal “**Hoja de maple**”

Transformaciones afines:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.01 \\ 0.0 & 0.51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.08 \\ -1.31 \end{pmatrix}; \text{ Probabilidad } P_1 \text{ de escoger } T_1 = 0.1$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.43 & 0.52 \\ -0.45 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.49 \\ -0.75 \end{pmatrix}; \text{ Probabilidad } P_2 \text{ de escoger } T_2 = 0.35$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_3 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45 & -0.49 \\ 0.47 & 0.47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.62 \\ -0.74 \end{pmatrix}; \text{ Probabilidad } P_3 \text{ de escoger } T_3 = 0.35$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T_4 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.0 \\ 0.0 & 0.51 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.02 \\ 1.62 \end{pmatrix}; \text{ Probabilidad } P_4 \text{ de escoger } T_4 = 0.2$$

11.- Repite para generar el fractal “**Triángulo de Sierpinsky**”:

$f_1(x,y) = (0.5x + 1, 0.5y+1)$. Probabilidad: 1/3	$f_2(x,y) = (0.5x + 1, 0.5y+50)$. Probabilidad: 1/3	$f_3(x,y) = (0.5x + 50, 0.5y+50)$. Probabilidad: 1/3
--	---	--

12.- Realiza simulaciones para genera los siguientes fractales, asignando valores a las probabilidades de las transformaciones **T_i**.

	a	b	c	d	e	f
T ₁	0	-0.5	0.5	0	0.5	0
T ₂	0	0.5	-0.5	0	0.5	0.5
T ₃	0.5	0	0	0.5	0.25	0.5

Fractal “**Cristal**”

13.- Investiga y **reporta**:

- El fundamento del esquema IFS (iterated function systems),
- Algoritmos para generar fractales,
- aplicaciones de los fractales,
- El empleo de las instrucciones de Matlab “**histogram**”, “**rand**”, “**unifrnd**”, “**plot**” y “**scatter**”.